DK 512.64 : 514.742/.743 : 003.62 : 001.4 DEUTSCHE NORM März 1987

Vektoren, Matrizen, Tensoren

Zeichen und Begriffe

DIN 1303

Vectors, matrices, tensors; symbols and concepts

Ersatz für Ausgabe 08.59x und DIN 5486/12.62

In der vorliegenden Norm werden Zeichen und Begriffe behandelt, die Vektoren, Matrizen und Tensoren betreffen. Dabei wird nur die algebraische Struktur dargestellt. Zu den Operatoren der Vektoranalysis vergleiche man DIN 4895 Teil 1 und Teil 2 über orthogonale Koordinatensysteme. Es wird ferner auf die folgenden weiteren Normen verwiesen, in denen auch geometrische Begriffe behandelt werden: DIN 1302 „Allgemeine mathematische Zeichen und Begriffe“, DIN 1312 „Geometrische Orientierung“, DIN 13 302 „Mathematische Strukturen; Zeichen und Begriffe“.

Die vorliegende Norm ist in der Form einer Tabelle gegeben, die (mit Ausnahme der Abschnitte 3 und 9) folgendermaßen aufgebaut ist:

Spalte 2 zeigt die in dieser Norm empfohlenen Zeichen und formalen Schreibweisen, Spalte 3 gibt eine sprachliche Formulierung, die als Sprechweise aber nicht in jedem Fall wörtlich eingehalten zu werden braucht. Spalte 4 enthält die Definition für die formalen Ausdrücke in Spalte 2. Die Spalte 2 ist bisweilen leer, wenn für einen Begriff keine formale Bezeichnung eingeführt wird, sondern nur eine umgangssprachliche Formulierung des Begriffes in Spalte 3 gegeben wird, die dann in Spalte 4 definiert wird. Spalte 5 enthält Hinweise, Zusätze oder Beispiele. Sofern diese umfangreicher sind, erscheinen sie in den Anmerkungen.

An einigen Stellen in der Norm werden die Symbole

$$\delta^{i_1 \, \cdots \, i_m}_{k_1 \, \cdots \, k_m}, \quad \delta^i_k, \quad \delta_{ik}, \qquad \operatorname{sgn}(\sigma)$$

verwendet, die in Abschnitt 10 erklärt sind. Für das Konjugiert-Komplexe wird nur eine Bezeichnung, nämlich die durch Überstreichen, verwendet.

Inhalt

Fortsetzung Seite 2 bis 27

Normenausschuß Einheiten und Formelgrößen (AEF) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.

1 Vektoren

Vektoren sind in der Physik Größen, die durch einen Betrag und eine Richtung gekennzeichnet werden. Man kann Vektoren zueinander addieren und sie mit skalaren Werten multiplizieren (vervielfachen). Diese beiden Operationen (siehe Nr 1.5 und Nr 1.6) sind konstituierend für den Begriff des Vektorraumes oder des linearen Raumes (siehe Nr 1.1). Zu diesen linearen Grundbegriffen tritt als metrischer Grundbegriff der des Skalarproduktes (siehe Nr 1.10 und Nr 1.18) mit der Möglichkeit, Beträge von Vektoren zu definieren (siehe Nr 1.11).

1	2	3	4	5
Nr	Zeichen	Sprechweise, Begriff	Definition	Bemerkungen
1.1		Vektorraum, linearer Raum	Eine Struktur, die gegeben ist durch eine Menge V, deren Elemente Vektoren, und eine Menge K, deren Elemente Skalare heißen, sowie folgende Verknüpfungen: Eine Addition von Vektoren mit den Eigenschaften von Nr 1.5 und eine Multiplikation von Skalaren und Vektoren mit den Eigenschaften von Nr 1.6. Ferner kann man Skalare addieren und multiplizieren, so daß K ein Körper im Sinne der Algebra ist.	Man sagt auch, daß V ein Vektorraum über K ist. V ist ein reeller bzw. komplexer Vektorraum, wenn der Skalarbereich K der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen bzw. der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist. Andere Fälle werden in dieser Norm nicht betrachtet. In den Anwendungen treten auch reelle bzw. komplexe Größenwerte als Skalare auf. Beispiel 1: Der Raum der Verschiebungsvektoren oder Verbindungsvektoren besteht aus den Vektoren, die von einem Anfangspunkt zu einem Endpunkt führen. Zwei solche Verbindungsvektoren sind genau dann gleich, wenn dieselbe Parallelverschiebung jeweils die Anfangspunkte in die Endpunkte überführt. Beispiel 2: Die möglichen Werte der elektrischen Feldstärke in einem Punkt bilden einen Vektorraum. Beispiel 3: Die Menge aller (n, m)-Matrizen reeller Zahlen bildet einen linearen Raum. Siehe Anmerkungen.
1.2	$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots$ oder $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots$		Zeichen für Vektoren	In dieser Norm wird die erste Darstellung benutzt. Oft rechnet man direkt mit Koordinaten und benutzt dann keine Zeichen für die Vektoren selbst. Für die Koordinaten benutzt man magere Buchstaben mit oberen oder unteren Indizes (siehe Nr 2.7, Nr 2.8 und Abschnitt 3). Siehe Anmerkungen.
1.3	$a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$		Zeichen für Skalare	Siehe Anmerkungen.
1.4	$\boldsymbol{o}$ oder $\vec{o}$	Nullvektor	neutrales Element bezüglich der Vektoraddition (siehe Nr 1.5)	Es gilt: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

Fortsetzung

1	2	3	4	5
Nr	Zeichen	Sprechweise, Begriff	Definition	Bemerkungen
1.5	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$ plus $\boldsymbol{b}$, Summe von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$	Grundbegriff im Vektorraum. Es gilt für alle $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ ist ein Vektor, $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$, es gibt ein $\boldsymbol{x}$ mit $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$	Die Lösung $\boldsymbol{x}$ der Gleichung $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ ist eindeutig durch $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ bestimmt. Sie wird mit $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ bezeichnet. $\boldsymbol{o}$ ist die Lösung von $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$, $-\boldsymbol{a}$ ist die Lösung von $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$.
1.6	$x\,\boldsymbol{a}$	x mal $\boldsymbol{a}$, x-faches von $\boldsymbol{a}$	Grundbegriff im Vektorraum. Es gilt für alle $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, x, y$: $x\,\boldsymbol{a}$ ist ein Vektor, $x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=x\,\boldsymbol{a}+x\,\boldsymbol{b}$, $(x+y)\,\boldsymbol{a}=x\,\boldsymbol{a}+y\,\boldsymbol{a}$, $x(y\,\boldsymbol{a})=(x\,y)\,\boldsymbol{a}$, $1\,\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$	Man setzt auch: $\boldsymbol{a}\,x =_{\text{def}} x\,\boldsymbol{a}$ Der Vektorraum wird dadurch zu einem zweiseitigen Vektorraum im Sinne von DIN 13 302, Ausgabe Juni 1978, Nr 7.3. Der Skalarbereich, der im allgemeinen auch ein nicht kommutativer Körper sein darf, muß dann kommutativ sein.
1.7		$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ sind linear unabhängig	es gilt: $\boldsymbol{o}=x_1\boldsymbol{a}_1+\ldots+x_n\boldsymbol{a}_n$ nur für $x_1=\ldots=x_n=0$	Wenn $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ nicht linear unabhängig sind, so sind sie linear abhängig (auch kollinear für $n=2$, komplanar für $n=3$).
1.8		V ist n-dimensional	es gibt n linear unabhängige Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, so daß jeder Vektor $\boldsymbol{a}$ sich als Linearkombination $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{a}_1+\ldots+x_n\boldsymbol{a}_n$ dieser Vektoren darstellen läßt.	Die Zahl n ist eindeutig durch V bestimmt. Die Definition erfaßt nur den Fall endlich-dimensionaler Vektorräume. Im folgenden seien alle auftretenden Vektorräume endlich-dimensional. Siehe Anmerkungen.
1.9		euklidischer Vektorraum	reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt nach Nr 1.10.	
1.10	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$ mal $\boldsymbol{b}$, inneres Produkt von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$, Skalarprodukt von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$	Grundbegriff in euklidischen Vektorräumen. Es gilt für alle $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, x$: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ ist ein (reeller) Skalar, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$, $(x\,\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=x(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geq 0$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0$ nur für $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$	Das Skalarprodukt ist auch im zweiten Faktor linear. Es gilt: $\boldsymbol{a}\cdot(x\,\boldsymbol{b})=x(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ Wenn künftig das innere Produkt oder darauf aufbauende Begriffe benutzt werden, so soll der zugrunde gelegte Vektorraum euklidisch sein. Wie bei anderen Produkten wird der Punkt als Multiplikationszeichen oft weggelassen. Doch vermeide man Verwechslungen mit anderen Verknüpfungen, z. B. dem dyadischen Produkt (siehe Nr 6.10, Spalte 5). Unter Benutzung von Betrag (siehe Nr 1.11) und Winkel (siehe Nr 1.13) läßt sich das Skalarprodukt auch so ausdrücken: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\,\lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$